تحلیل نیم فضای ایزوتروپ جانبی تحت اثر صفحه صلب دایره‌ای با استفاده از توابع گرین بار حلقوی*

عزیزالله اردشیربهرستاقی[۱] مرتضی اسکندری‌قادی[۲]

چکیده *هدف اصلی این مقاله، تحلیل یک نیم فضا با رفتار هم‌سان (ایزوتروپ) جانبی است که تحت اثر صفحه‌ی صلب دایره‌ای با تغییرمکان دلخواه روی سطح نیم‌فضا قرار دارد. بدین منظور، ابتدا با مجزاسازی معادلات تعادل با استفاده از توابع پتانسیل هو- نواکی- لخنیسکی، معادلات به دست آمده با استفاده از سری فوریه و تبدیل هنکل در دستگاه مختصات استوانه‌ای برای بار با توزیع رینگی با امتداد دلخواه حل شده و تغییرمکان‌ها و تنش‌های محیط به عنوان توابع گرین تغییرمکان و تنش به‌دست می‌آیند. پس از آن با اعمال نیرو با توزیع حلقوی و با دامنه‌ی مجهول در حلقه‌های متفاوت، تغییرمکان زیر بار تعیین می‌شود. بسته به این که هدف تعیین تنش‌ها تحت اثر تغییرمکان قائم، افقی و یا چرخشی صلب باشد، شرایط هر یک به تغییرمکان نیم‌فضا در تماس با صفحه‌ی صلب اعمال شده و دامنه‌ی نیرو با توزیع حلقوی در حلقه‌های متفاوت تعیین می‌شود. نشان داده می‌شود که نتایج به دست آمده برای حالت ساده‌ی محیط هم‌سان بر نتایج موجود منطبق می‌باشد. به منظور نشان دادن اثر ناهم‌سانی بر تحلیل‌ها، نتایج برای چند نوع ماده‌ی هم‌سان‌جانبی با ناهم‌سانی متفاوت ارائه شده و مقایسه می‌شوند.*

واژه‌های کلیدی نیم فضا، ایزوتروپ جانبی، توابع گرین، دیسک صلب، بار حلقوی.

Analysis of Transversely Isotropic Half-Spaces under the Effect of a Rigid Circular Plate Using Ring Load Green's Functions

A. Ardeshir-Behrestaghi M. Eskandari-Ghadi

Abstract *The main goal for this research is to analyze a transversely isotropic half-space under the effect of a circular rigid disc attached on the surface of the domain. To do so, the potential method is used to uncouple the Navier's equilibrium partial differential equations. Utilizing Hu-Nowakii-Lekhnitskii potential functions and both Fourier series and Hankel transform, the displacements and stresses Green's functions are determined for a surface ring load in a cylindrical coordinate system attached to the domain. Then, the effect of circular rigid disc is seen by applying some ring loads of unknown amplitudes, depends on the direction of displacement of the disc, which may be vertical, horizontal or rocking displacement. The amplitudes of the different ring loads are determined by satisfying the displacement boundary conditions. It is shown that the results are identical to the existing ones for the isotropic case. To assess the effect of anisotropy, the results are numerically evaluated for different transversely isotropic materials and compared.*

Key Words Half-Space, Transversely Isotropic, Green's Function, Rigid Disc, Ring Load.

---

*نسخه‌ی اول مقاله در تاریخ ۱۳۸۷/۸/۲۱ و نسخه‌ی نهایی آماده چاپ آن در تاریخ ۱۳۸۹/۱/۱۹ می‌باشد.

(۱) عهده‌دار مکاتبات: دانشجوی دکتری سازه، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل

(۲) دانشیار، گروه علوم پایه مهندسی، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران

مقدمه

تحلیل محیط‌ها تحت اثر تغییرمکان‌ها و حرکت‌های صفحات صلب، مدت‌هاست که ذهن محققان مکانیک مهندسی، تئوری ارتجاعی و ریاضیات کاربردی را اشغال کرده است [1-6]. از طرفی بررسی محیط‌های ناهم‌سان اجتناب ناپذیر است. شاید اولین بررسی یک نیم‌فضای ناهم‌سان تحت اثر نیروی سطحی مربوط به میشل [7] باشد. نتایج بررسی محیط‌ها تحت تغییرمکان‌ها و حرکت‌های صفحات صلب می‌تواند در شکل دادن فلزات در مهندسی مکانیک و در تحلیل تنش‌ها و تغییرمکان‌های زیر شالوده در مهندسی عمران مورد استفاده قرار گیرد. همواره تماس نیرویی یک صفحه‌ی صلب با یک محیط ارتجاعی، در لبه‌های تماس صفحه‌ی صلب و محیط ارتجاعی ایجاد رفتار تکین (Singular) می‌نماید. این موضوع به علت مقاومت محدود اجسام مورد علاقه‌ی مهندسان و به علت مشکلات تحلیلی مورد علاقه‌ی محققان ریاضیات کاربردی بوده است [1, 5, 6, 8]. از آن جایی که معادلات تعادل در تئوری ارتجاعی، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی و درگیر می‌باشند، به منظور حل تحلیلی و بررسی دقیق جواب‌ها نیاز به مجزاسازی این معادلات می‌باشد. یکی از ابزارهای قوی و کاربردی در این زمینه استفاده از توابع پتانسیل می‌باشد. توابع پتانسیل متعددی برای جداسازی معادلات تعادل در محیط‌های هم‌سان ارائه شده‌اند که از آن میان می‌توان به توابع پتانسیل لامه، لاو، بوسینسک، نوبر و پاپکویچ، گالرکین [۹] و تابع پتانسیل اسکندری قادی و پک [10] اشاره کرد. برخی از این توابع پتانسیل، قادر به حل همه‌ی مسائل استاتیکی تئوری ارتجاعی نیستند. به عنوان مثال، تابع پتانسیل لاو که به تابع کرنشی لاو نیز مشهور است، می‌تواند مسائلی را حل نماید که در آن $u \cdot \mathrm{curl}\, e = 0$ است. در این‌جا u؛ بردار تغییرمکان و e ؛ یک امتداد دلخواه می‌باشد. توابع پتانسیلی که قادر به حل همه‌ی مسائل باشند را توابع پتانسیل کامل گویند و در مقابل توابع پتانسیلی که برخی از مسائل را حل نمایند، توابع پتانسیل ناکامل نامیده می‌شوند. تابع کرنشی لاو با اندک اصلاح به یک مجموعه‌ی کامل تبدیل می‌شود [11]. از توابع پتانسیل کامل ارائه شده برای محیط‌های هم‌سان جانبی می‌توان به توابع الیوت [12]، هو- نواکی- لخنیتسکی [13]، ونگ و ونگ [14] و اسکندری قادی [15] اشاره کرد. توابع الیوت و توابع هو- نواکی-لخنیتسکی برای حل معادلات تعادل و توابع اسکندری قادی برای حل معادلات حرکت در محیط‌های هم‌سان جانبی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

حل دقیق اثر تغییرمکان صفحات صلب روی نیم‌فضاها به حل معادلات انتگرالی دوگانه می‌انجامد [2,6]. معمولاً برای حل معادلات انتگرالی، با استفاده از تبدیلات انتگرالی این معادلات به معادلات انتگرالی فردهلم نوع دوم [16] و یا هر معادله ی قابل حل دیگر تبدیل می‌شود. به علت مشکلات مربوط به معادلات انتگرالی دوگانه، ارائه‌ی یک راه حل کارا، دقیق و آسان همواره مورد توجه محققین بوده است. در این‌جا یک راه حل ساده ودقیق جایگزین معادلات انتگرالی دوگانه و پس‌آمدهای آن می‌شود. در این مقاله توابع هو- نواکی- لخنیتسکی به علت کامل بودن [14] و سادگی مورد استفاده قرار می‌گیرد. معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی حاکم بر توابع پتانسیل در دستگاه مختصات استوانه‌ای با استفاده از سری فوریه در امتداد محیطی و تبدیل هنکل در امتداد شعاعی به معادلات دیفرانسیل معمولی در امتداد قائم تبدیل شده و حل می‌شوند. ضرایب ثابت برای شرایط بار حلقوی تعیین می‌شوند. از آن‌جایی که توزیع تنش در محل تماس صفحه صلب با نیم‌فضا نامشخص است، تنش تماسی را به صورت تنش حلقوی با پهنای محدود با دامنه‌ی

مشخص نوشته و با برقراری شرایط تغییرمکان صفحه صلب، دامنه‌ی تنش‌های رینگی تعیین می‌شود. بدین ترتیب، توزیع تنش تماسی تعیین شده و نشان داده می‌شود که با افزایش تعداد حلقه‌ها نتایج به سرعت به سمت نتایج دقیق هم‌گرا می‌شود. به منظور بررسی اثرات ناهمسانی نتایج برای محیط‌های هم‌سان جانبی با ناهم‌سانی‌های متفاوت ارائه شده و مقایسه می‌شوند. یکی از استفاده‌های نتایج این مقاله، تحلیل شالوده‌های صلب متکی بر محیط‌های هم‌سان جانبی می‌باشد.

معادلات حاکم و حل آن‌ها

یک نیم‌فضای هم‌سان جانبی طوری در نظر گرفته می‌شود که محور ایزوتروپی (هم‌سانی) آن عمود بر سطح آزاد نیم‌فضا باشد. دستگاه مختصات استوانه‌ای $(o:r,\theta,z)$ طوری قرار داده می‌شود که در آن امتداد z موازی محور هم‌سانی بوده و نیم‌فضا با $z>0$ تعریف شود. معادلات تعادل بر حسب تغییرمکان، برای حالتی که نیروهای حجمی وجود نداشته باشد به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$A_{11}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r^2}\right)+\frac{A_{11}-A_{12}}{2}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+ A_{44}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{A_{11}+A_{12}}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial r\partial\theta}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)- 2A_{11}\frac{1}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\theta}+(A_{13}+A_{44})\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial z}=0,$$

$$\frac{A_{11}-A_{12}}{2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r^2}\right)+A_{11}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}+ A_{44}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\frac{A_{11}+A_{12}}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+ 2A_{11}\frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}+(A_{13}+A_{44})\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta\partial z}=0,$$

$$A_{33}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+A_{44}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)+ (A_{13}+A_{44})\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial z}\right)+(A_{13}+A_{44})\frac{1}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta\partial z}=0.$$

(۱)

در این رابطه u,v,w مؤلفه‌های بردار تغییرمکان به ترتیب در امتدادهای r,θ,z بوده و A_{ij} ضرایب ارتجاعی می‌باشند که تانسور تنش σ_{ij} را به تانسور کرنش ε_{ij} مربوط می‌سازد:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}&=A_{11}\varepsilon_{rr}+A_{12}\varepsilon_{\theta\theta}+A_{13}\varepsilon_{zz},\\
\sigma_{\theta\theta}&=A_{12}\varepsilon_{rr}+A_{11}\varepsilon_{\theta\theta}+A_{13}\varepsilon_{zz},\\
\sigma_{zz}&=A_{13}\varepsilon_{rr}+A_{13}\varepsilon_{\theta\theta}+A_{33}\varepsilon_{zz},\\
\sigma_{rz}&=2A_{44}\varepsilon_{rz},\ \ \sigma_{\theta z}=2A_{44}\varepsilon_{\theta z},\ \ \sigma_{r\theta}=2A_{66}\varepsilon_{r\theta},
\end{aligned}$$

(۲)

که در آن $A_{66}=(A_{11}-A_{12})/2$ و $\varepsilon_{ij}\ (i,j=r,\theta,z)$ مؤلفه‌های تانسور کرنش می‌باشد. ضرایب ارتجاعی A_{ij} به صورت زیر تعریف می‌شوند[13] :

$$A_{11}=\frac{E(1-\frac{E}{\bar{E}}\bar{\upsilon}^2)}{(1+\upsilon)(1-\upsilon-2\frac{E}{\bar{E}}\bar{\upsilon}^2)},\ \ A_{13}=\frac{E\bar{\upsilon}}{1-\upsilon-2\frac{E}{\bar{E}}\bar{\upsilon}^2},$$

$$A_{33}=\frac{\bar{E}(1-\upsilon)}{1-\upsilon-2\frac{E}{\bar{E}}\bar{\upsilon}^2},\ \ A_{44}=\bar{\mu},\ A_{66}=\frac{E}{2(1+\upsilon)}=\mu.$$

(۳)

در رابطه‌ی (۳)، E؛ معرف مدول یانگ در صفحه‌ی ایزوتروپی، $\bar{E}$؛ معرف مدول یانگ عمود بر صفحه‌ی ایزوتروپی، υ؛ معرف ضریب پواسون در صفحه‌ی ایزوتروپی (یعنی جمع شدگی در یک امتداد دلخواه در صفحه‌ی ایزوتروپی به علت کشش در امتداد عمود بر این امتداد مجدداً در صفحهٔ ایزوتروپی)، $\bar{\upsilon}$؛ معرف ضریب پواسون عمود بر صفحه‌ی ایزوتروپی (جمع شدگی عمود بر صفحه‌ی ایزوتروپی به علت کشش در امتداد دلخواه در صفحه‌ی ایزوتروپی)، μ؛ معرف مدول برشی در صفحه‌ی ایزوتروپی و $\bar{\mu}$؛ معرف مدول برشی در صفحات عمود بر صفحه‌ی ایزوتروپی می‌باشد. برای مواد هم‌سان (ایزوتروپ) ضرایب

ارتجاعی A_{ij} به صورت ذیل تعریف می‌شوند:

$$A_{11}=A_{33}=2\mu(1-\upsilon)/(1-2\upsilon),$$
$$A_{12}=A_{13}=2\mu\upsilon/(1-2\upsilon),\ A_{44}=A_{66}=\mu,$$

(۴)

که در رابطه‌ی فوق، μ؛ معرف مدول برشی و υ؛ معرف ضریب پواسون می‌باشد.

معادلات تعادل (۱) یک دستگاه معادلات دیفرانسیل درگیر با مشتقات جزیی می‌باشند. به منظور مجزا سازی این معادلات از تابع پتانسیل F و χ که همان توابع هو- نواکی- لخنیتسکی می باشند، استفاده می‌شود. مؤلفه‌های بردار تغییرمکان بر حسب توابع پتانسیل F و χ در دستگاه مختصات استوانه‌ای و در حالت استاتیکی به صورت ذیل نوشته می‌شوند [14]:

$$U=-\alpha_3\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial z}-\frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial\theta},\quad V=-\alpha_3\frac{1}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta\partial z}+\frac{\partial\chi}{\partial r},$$
$$W=(1+\alpha_1)\left[\nabla_{r\theta}^2+\beta\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]F,$$

(۵)

که در آن:

$$\alpha_1=\frac{A_{66}+A_{12}}{A_{66}},\quad \alpha_2=\frac{A_{44}}{A_{66}},\quad \alpha_3=\frac{A_{13}+A_{44}}{A_{66}},$$

$$\beta=\frac{\alpha_2}{1+\alpha_1},\qquad \nabla_{r\theta}^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}.$$

(٦)

با قرار دادن روابط (۵) در معادلات تعادل (۱)، دو معادله‌ی دیفرانسیل کاملاً مستقل از هم و حاکم بر توابع پتانسیل F و χ به صورت ذیل درمی‌آیند:

$$\left[\nabla_1^2\nabla_2^2\right]F(r,\theta,z)=0,\qquad \nabla_0^2\chi(r,\theta,z)=0,$$

(۷)

که در آن:

$$\nabla_i^2=\nabla_{r\theta}^2+\frac{1}{s_i^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}.\qquad (i=0,1,2)$$

(۸)

و $s_0^2=A_{66}/A_{44}$. به علاوه پارامترهای s_1^2 و s_2^2 ریشه‌های معادله‌ی ذیل هستند:

$$A_{33}A_{44}s^4+(A_{13}^2+2A_{13}A_{44}-A_{11}A_{33})s^2+$$
$$A_{11}A_{44}=0.$$

(۹)

s_1 و s_2 می‌توانند اعداد مختلط باشند، اما نمی‌توانند اعداد موهومی خالص باشند [13].

به منظور حل معادلات (۷)، می‌توان توابع F و χ را نسبت به θ به صورت سری فوریه نوشت. سری فوریه مختلط این توابع به صورت ذیل هستند[5]:

$$F(r,\theta,z)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}F_m(r,z)e^{im\theta},$$
$$\chi(r,\theta,z)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\chi_m(r,z)e^{im\theta},$$

(۱۰)

که در آن F_m و χ_m؛ ضرایب m ام سری فوریه توابع F و χ هستند [5]:

$$\left[F_m,\chi_m(r,z)\right]=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[F,\chi(r,\theta,z)\right]e^{-im\theta}d\theta. \qquad (۱۱)$$

با قرار دادن روابط (۱۰) و (۱۱) در معادلات (۷) این معادلات به صورت ذیل نوشته می‌شوند:

$$\left[\nabla_{1m}^2\nabla_{2m}^2\right]F_m(r,z)=0,$$

$$\nabla_{0m}^2\chi_m(r,z)=0,$$

(۱۲)

که در آن برای $i=(0,1,2)$:

$$\nabla^2_{im} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} + \frac{1}{s_i^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}. \qquad (۱۳)$$

با توجه به هندسه و شرایط مرزی مسئله بسیار مناسب می‌باشد که از تبدیل هنکل مرتبه m ام نسبت به امتداد شعاعی r به شرح ذیل استفاده شود [5]:

$$\left[F_m^m, \chi_m^m\right](\xi,z) = \int_0^\infty \left[F_m, \chi_m\right](r,z)\, r\, J_m(\xi r)\, dr, \qquad (۱٤)$$

و تبدیل معکوس هنکل آن‌ها عبارتند از:

$$\left[F_m, \chi_m\right](r,z) = \int_0^\infty \left[F_m^m, \chi_m^m\right](\xi,z)\, \xi\, J_m(\xi r)\, d\xi \qquad (۱۵)$$

که در آن J_m ؛ تابع بسل نوع اول از مرتبه m می‌باشد. با قرار دادن رابطه‌ی (۱٤) در معادلات (۱۲) این معادلات به صورت ذیل درمی‌آیند:

$$\left[\bar{\nabla}^2_{1m}\bar{\nabla}^2_{2m}\right] F_m^m(\xi,z) = 0 \qquad (۱-۱٦)$$

$$\bar{\nabla}^2_{0m}\chi_m^m(\xi,z) = 0, \qquad (۲-۱٦)$$

که در آن:

$$\bar{\nabla}^2_{im} = d^2/(s_i^2 dz^2) - \xi^2. \quad i = (0,1,2) \qquad (۱۷)$$

معادلات (۱-۱٦) و (۲-۱٦) به ترتیب یک معادله‌ی دیفرانسیل معمولی مرتبه چهارم و یک معادله‌ی دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم با ضرایب ثابت می‌باشند. جواب معادلات (۱٦) به صورت ذیل می‌باشند:

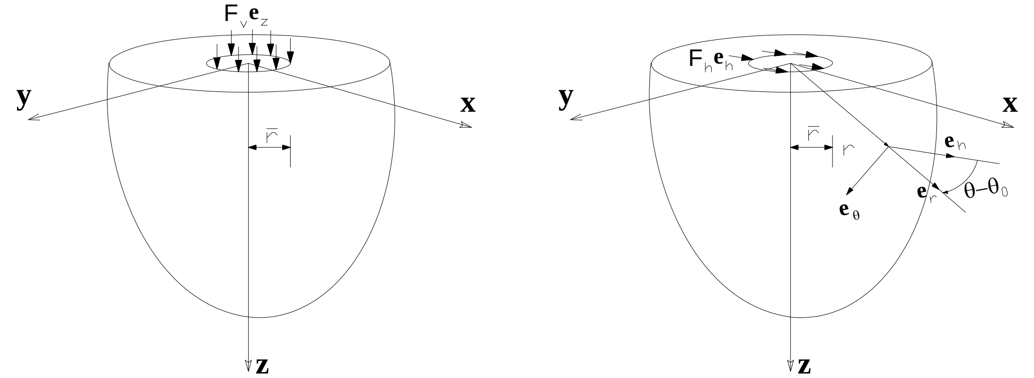
$$F_m^m(\xi,z) = A_m(\xi)e^{-\lambda_1 z} + B_m(\xi)e^{-\lambda_2 z},$$

$$\chi_m^m(\xi,z) = C_m(\xi)e^{-\lambda_3 z}, \qquad (۱۸)$$

که در آن:

$$\lambda_1 = s_1\xi, \quad \lambda_2 = s_2\xi, \quad \lambda_3 = s_0\xi. \qquad (۱۹)$$

مطابق شکل (۱)، فرض می‌شود که نیروی استاتیکی دلخواه به شدت $f(r,\theta,\bar{r})$ روی رینگ π_0 در $z=0$ اعمال می‌گردد که به صورت ذیل تعریف می‌شود:



شکل ۱ نیم‌فضای هم‌سان جانبی تحت نیرو با توزیع حلقوی مؤثر بر حلقه به شعاع $\bar{r}$

$$f(r,\theta,\bar{r}) = f_h(r,\theta,\bar{r}) + f_v(r,\theta,\bar{r})$$
$$= F_h \frac{\delta(r-\bar{r})}{2\pi r} e_h + F_v \frac{\delta(r-\bar{r})}{2\pi r} e_z,$$

(۲۰- الف)

و در آن:

$$f_h(r,\theta,\bar{r}) = (1/2\pi r)F_h\delta(r-\bar{r})e_h,$$
$$f_v(r,\theta,\bar{r}) = (1/2\pi r)F_v\delta(r-\bar{r})e_z,$$

(۲۰- ب)

$$e_h = e_r\cos(\theta-\theta_0) - e_\theta\sin(\theta-\theta_0). \quad (۲۱)$$

بر این اساس شرایط مرزی در $z=0$ عبارتند از:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{rz}(r,\theta,\bar{r},z=0) &= -P(r,\theta,\bar{r}),\\ \sigma_{z\theta}(r,\theta,\bar{r},z=0) &= -Q(r,\theta,\bar{r}),\\ \sigma_{zz}(r,\theta,\bar{r},z=0) &= -R(r,\theta,\bar{r}),\end{aligned}\right\}, \quad (r,\theta,\bar{r})\in\pi_0$$
$$\left.\begin{aligned} \sigma_{rz}(r,\theta,\bar{r},z=0) &= 0,\\ \sigma_{z\theta}(r,\theta,\bar{r},z=0) &= 0,\\ \sigma_{zz}(r,\theta,\bar{r},z=0) &= 0,\end{aligned}\right\}. \quad (r,\theta,\bar{r})\notin\pi_0$$

(۲۲)

در بی‌نهایت دور $(z\to+\infty)$ یا $(r\to\infty)$ کلیه‌ی مؤلفه‌های تانسور تنش و بردار تغییرمکان صفر هستند. در روابط (۲۲)، $P(r,\theta,\bar{r})$، $Q(r,\theta,\bar{r})$ و $R(r,\theta,\bar{r})$ مؤلفه‌های بردار بارگذاری $f(r,\theta,\bar{r})$ به ترتیب در امتدادهای r، θ و z می‌باشند به طوری که:

$$P(r,\theta,\bar{r}) = F_h\frac{\delta(r-\bar{r})}{2\pi r}\cos(\theta-\theta_0),$$
$$Q(r,\theta,\bar{r}) = -F_h\frac{\delta(r-\bar{r})}{2\pi r}\sin(\theta-\theta_0),$$
$$R(r,\theta,\bar{r}) = F_v\frac{\delta(r-\bar{r})}{2\pi r}.$$

(۲۳)

شرایط مرزی داده شده در روابط (۲۲) باید در فضای هنکل- فوریه نوشته شوند تا با جای‌گزینی معادلات (۱۸) در آن‌ها، بتوان ۳ تابع A_m، B_m و C_m را به‌دست آورد. بدین منظور تغییرمکان‌ها و تنش‌ها به صورت ذیل با هم ترکیب شده تا بر حسب توابع F_m^m و χ_m^m نوشته شوند:

$$u_m^{m-1} - iv_m^{m-1} = -\alpha_3\xi\frac{dF_m^m}{dz} - i\xi\chi_m^m,$$
$$u_m^{m+1} + iv_m^{m+1} = \alpha_3\xi\frac{dF_m^m}{dz} - i\xi\chi_m^m,$$
$$w_m^m = (1+\alpha_1)[-\xi^2 + \beta\frac{\partial^2}{\partial z^2}]F_m^m,$$

(۲٤)

که در آن u_m^{m-1} و u_m^{m+1} به ترتیب تبدیل هنکل مرتبه m-1 و مرتبه m+1 تابع u_m و v_m^{m-1} ، v_m^{m+1} به ترتیب تبدیل هنکل مرتبه m-1 و m+1 تابع v_m و w_m^m، χ_m^m و F_m^m به ترتیب، تبدیل هنکل مرتبه m توابع w_m، χ_m و F_m می‌باشند. هم‌چنین روابط تنش- توابع پتانسیل در فضای هنکل- فوریه به صورت ذیل در می‌آید:

$$\sigma_{zrm}^{m-1} - i\sigma_{z\theta m}^{m-1} = -A_{44}\xi\left[\left(\alpha_3-\alpha_2\right)\frac{d^2}{dz^2} + \xi^2\left(1+\alpha_1\right)\right]F_m^m - A_{44}\xi i\frac{d\chi_m^m}{dz},$$
$$\sigma_{zrm}^{m+1} + i\sigma_{z\theta m}^{m+1} = A_{44}\xi\left[\left(\alpha_3-\alpha_2\right)\frac{d^2}{dz^2} + \xi^2\left(1+\alpha_1\right)\right]F_m^m - A_{44}\xi i\frac{d\chi_m^m}{dz},$$
$$\sigma_{zzm}^m = \frac{d}{dz}\left[\alpha_3A_{13}\xi^2 - A_{33}\xi^2\left(1+\alpha_1\right) + A_{33}\alpha_2\frac{d^2}{dz^2}\right]F_m^m,$$

$$\sigma_{rrm}^m + \left(A_{11}-A_{12}\right)\left\{(\frac{u_m}{r})^m + i\,m(\frac{v_m}{r})^m\right\}$$
$$= \frac{d}{dz}\left[\alpha_3A_{11}\xi^2 - A_{13}\xi^2(1+\alpha_1) + A_{13}\alpha_2\frac{d^2}{dz^2}\right]F_m^m,$$

$$\sigma_{\theta\theta m}^m - \left(A_{11}-A_{12}\right)\left\{(\frac{u_m}{r})^m + i\,m(\frac{v_m}{r})^m\right\}$$
$$= \frac{d}{dz}\left[\alpha_3A_{12}\xi^2 - A_{13}\xi^2(1+\alpha_1) + A_{13}\alpha_2\frac{d^2}{dz^2}\right]F_m^m,$$

$$\sigma_{r\theta m}^m + \left(A_{11}-A_{12}\right)\left\{(\frac{v_m}{r})^m - i\,m(\frac{u_m}{r})^m\right\}$$
$$= -\frac{A_{11}-A_{12}}{2}\xi^2\chi_m^m,$$

(۲۵)

که در آن σ_{zrm}^{m-1}، $\sigma_{z\theta m}^{m+1}$ و ... تبدیل هنکل مرتبه $m-1$، $m+1$ و ... ضرایب m ام سری فوریه مؤلفه‌های

تانسور تنش می‌باشند. از تبدیل روابط (۲۲) در فضای هنکل- فوریه می‌توان به‌دست آورد:

$$\sigma_{zrm}^{m-1} - i\sigma_{z\theta m}^{m-1} = P_m^{m-1} - iQ_m^{m-1},$$
$$\sigma_{zrm}^{m+1} + i\sigma_{z\theta m}^{m+1} = P_m^{m+1} + iQ_m^{m+1},$$
$$\sigma_{zzm}^{m} = R_m^{m},$$

(۲۶)

و از ترکیب روابط (۲۶) و (۲۵) می‌توان نوشت:

$$-\xi A_{44}\eta_1 A_m - \xi A_{44}\eta_2 B_m + i\xi A_{44}\lambda_{m3} C_m = P_m^{m-1} - iQ_m^{m-1},$$

$$\xi A_{44}\eta_1 A_m + \xi A_{44}\eta_2 B_m + i\xi A_{44}\lambda_{m3} C_m = P_m^{m+1} + iQ_m^{m+1},$$

$$A_{33}[\nu_1 A_m + \nu_2 B_m] = R_m^m,$$

(۲۷)

که در آن:

$$\begin{cases} \eta_i = (\alpha_3 - \alpha_2)\lambda_i^2 + \xi^2(1+\alpha_1), \\ \nu_i = (\eta_i - \alpha_3 \dfrac{A_{13}}{A_{33}}\xi^2 - \alpha_3\lambda_i^2)\lambda_i. \qquad i = (1,2) \end{cases}$$

(۲۸)

از حل دستگاه معادلات رابطه‌ی (۲۷) توابع مجهول A_m، B_m و C_m به دست می‌آیند:

$$A_m = \frac{1}{\xi I}\left[\frac{-\nu_2}{2A_{44}}(X_m - Y_m) - \eta_2\xi\frac{Z_m}{A_{33}}\right],$$

$$B_m = \frac{1}{\xi I}\left[\frac{\nu_1}{2A_{44}}(X_m - Y_m) + \eta_1\xi\frac{Z_m}{A_{33}}\right],$$

$$C_m = \frac{i(X_m + Y_m)}{2\xi\lambda_3 A_{44}},$$

(۲۹)

که در آن:

$$X_m = P_m^{m-1}(\xi) - iQ_m^{m-1}(\xi), \quad Y_m = P_m^{m+1}(\xi) + iQ_m^{m+1}(\xi),$$
$$Z_m = R_m^m(\xi), \qquad I(\xi) = \eta_2\nu_1 - \eta_1\nu_2.$$

(۳۰)

با جای‌گذاری روابط (۲۹) در روابط (۲٤) و (۲۵)، توابع تغییرمکان و تنش در فضای هنکل- فوریه به دست می‌آیند:

$$w_m^m = \Omega_1(\xi,z)\frac{X_m - Y_m}{2A_{44}} + \Omega_2(\xi,z)\frac{Z_m}{A_{33}},$$

$$u_m^{m+1} + iv_m^{m+1} = \gamma_1(\xi,z)\frac{X_m - Y_m}{2A_{44}} + \gamma_2(\xi,z)\frac{X_m + Y_m}{2A_{44}} + \gamma_3(\xi,z)\frac{Z_m}{A_{33}},$$

$$u_m^{m-1} - iv_m^{m-1} = -\gamma_1(\xi,z)\frac{X_m - Y_m}{2A_{44}} + \gamma_2(\xi,z)\frac{X_m + Y_m}{2A_{44}} - \gamma_3(\xi,z)\frac{Z_m}{A_{33}},$$

(۳۱)

$$\sigma_{zzm}^m = \left[A_{33}\frac{d\Omega_1}{dz} + A_{13}\xi\gamma_1\right]\left(\frac{X_m - Y_m}{2A_{44}}\right) + \left[A_{33}\frac{d\Omega_2}{dz} + A_{13}\xi\gamma_3\right]\left(\frac{Z_m}{A_{33}}\right),$$

$$\sigma_{zrm}^{m+1} + i\sigma_{z\theta m}^{m+1} = A_{44}\left[\frac{d\gamma_1}{dz} - \xi\Omega_1\right]\left(\frac{X_m - Y_m}{2A_{44}}\right) + A_{44}\left[\frac{d\gamma_2}{dz}\right]\left(\frac{X_m + Y_m}{2A_{44}}\right) + A_{44}\left[\frac{d\gamma_3}{dz} - \xi\Omega_2\right]\left(\frac{Z_m}{A_{33}}\right),$$

$$\sigma_{zrm}^{m-1} - i\sigma_{z\theta m}^{m-1} = -A_{44}\left[\frac{d\gamma_1}{dz} - \xi\Omega_1\right]\left(\frac{X_m - Y_m}{2A_{44}}\right) + A_{44}\left[\frac{d\gamma_2}{dz}\right]\left(\frac{X_m + Y_m}{2A_{44}}\right) - A_{44}\left[\frac{d\gamma_3}{dz} - \xi\Omega_2\right]\left(\frac{Z_m}{A_{33}}\right),$$

$$\sigma_{rrm}^m + 2A_{66}\left(\frac{u_m}{r} + im\frac{v_m}{r}\right)^m = \left[A_{13}\frac{d\Omega_1}{dz} + A_{11}\xi\gamma_1\right]\left(\frac{X_m - Y_m}{2A_{44}}\right) + \left[A_{13}\frac{d\Omega_2}{dz} + A_{11}\xi\gamma_3\right]\left(\frac{Z_m}{A_{33}}\right),$$

$$\sigma_{\theta\theta m}^m - 2A_{66}\left(\frac{u_m}{r} + im\frac{v_m}{r}\right)^m = \left[A_{13}\frac{d\Omega_1}{dz} + A_{12}\xi\gamma_1\right]\left(\frac{X_m - Y_m}{2A_{44}}\right) + \left[A_{13}\frac{d\Omega_2}{dz} + A_{12}\xi\gamma_3\right]\left(\frac{Z_m}{A_{33}}\right),$$

$$\sigma_{r\theta m}^m + 2A_{66}\left(\frac{v_m}{r} - im\frac{u_m}{r}\right)^m = -iA_{66}\xi\gamma_2\left(\frac{X_m + Y_m}{2A_{44}}\right).$$

(۳۲)

در روابط فوق، پارامترهای γ_1، γ_2، γ_3، Ω_1 و Ω_2 و مشتقات آن‌ها برای حالت‌هایی که $s_1 \neq s_2$ و $s_1 = s_2$ متفاوت بوده و در ضمیمه‌ی الف داده شده‌اند.

در حالت بارگذاری رینگی توابع X_m، Y_m و Z_m عبارتند از:

$$P_{\pm1}(r,\overline{r}) = F_h\, e^{\mp i\theta_0}\,\frac{\delta(r-\overline{r})}{4\pi r},\ P_m(r,\overline{r}) = 0,\ m \neq \pm1,$$
$$Q_{\pm1}(r,\overline{r}) = \pm iF_h\, e^{\mp i\theta_0}\,\frac{\delta(r-\overline{r})}{4\pi r},\ Q_m(r,\overline{r}) = 0,\ m \neq \pm1,$$
$$R_0(r,\overline{r}) = F_v\,\frac{\delta(r-\overline{r})}{2\pi r},\ R_m(r,\overline{r}) = 0, m \neq 0,$$

(۳۳)

$$X_1(\overline{r},\xi) = \frac{F_h}{2\pi} J_0(\xi\overline{r})\, e^{-i\theta_0},\ X_m(\overline{r},\xi) = 0,\ m \neq 1,$$
$$Y_{-1}(\overline{r},\xi) = \frac{F_h}{2\pi} J_0(\xi\overline{r})\, e^{i\theta_0},\ Y_m(\overline{r},\xi) = 0, m \neq -1,$$
$$Z_0(\overline{r},\xi) = \frac{F_v}{2\pi} J_0(\xi\overline{r}),\ \ Z_m(\overline{r},\xi) = 0, \qquad m \neq 0.$$

(۳٤)

تحلیل تحت اثر شالوده صلب

برای تحلیل نیم‌فضای هم‌سان جانبی تحت شالوده‌ی صلب دایره‌ای به شعاع a، نیم‌فضای مورد نظر تحت N فشار رینگی متفاوت هر یک با شدت $p_i\ (i = 1,2,3,\dots,N)$ مؤثر بر حلقه‌ای به شعاع مرکزی $\overline{r}_i$ و پهنای ثابت a/N قرار می‌گیرد؛ به طوری که N؛ تعداد حلقه‌هایی می‌باشد که تحت فشار حلقوی قرار دارند (شکل (۲)).

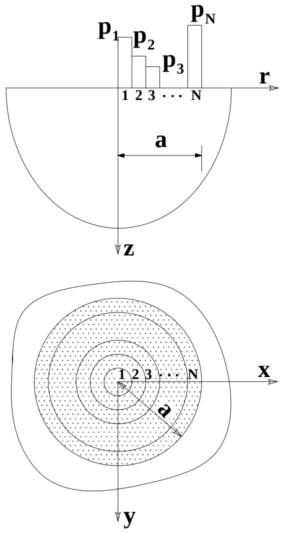
در این صورت، تغییرمکان هر نقطه از محیط با مختصات $M(r,\theta,z)$ برابر:

$$W(M) = \sum_{i=1}^{N} W_i(M), \qquad (۳۵)$$

می‌باشد؛ به طوری که $W_i(M)$ تغییرمکان نقطه M به علت فشار حلقوی p_i مؤثر بر حلقه‌ای به شعاع $\overline{r}_i$ و به پهنای a/N است. از آن‌جایی که p_i ثابت می‌باشد، $W_i(M)$ با استفاده از روابط (۳۱) و (۳٤) برابر است با:

$$W_i(M) = p_i \overline{W}_i(M) =$$
$$p_i \int_{m_i}^{n_i} \left[\frac{1}{2\pi A_{33}} \int_0^{\infty} \xi\, \Omega_2(\xi,z)\, J_0(\xi\overline{r})\, J_0(\xi r)\, d\xi \right] d\,\overline{r},$$
$$m_i = a(i-1)/N, \qquad n_i = a\,i/N.$$

(۳٦)



شکل ۲ نیم‌فضای هم‌سان جانبی تحت فشار با توزیع حلقوی مؤثر بر N حلقه هر یک به پهنای a/N

از آن‌جایی که شالوده‌ی دایره‌ای مورد مطالعه صلب می‌باشد، تغییرمکان کلیه‌ی نقاط محیط در محل تماس با شالوده ثابت می‌باشد. اگر این مقدار ثابت را با Δ_W نشان دهیم، آنگاه با مساوی قرار دادن تغییرمکان N نقطه $A_i(r = \overline{r}_i, \theta, z = 0)$ با Δ_W، به N معادله می‌رسیم؛ به طوری که با حل آن‌ها، N مجهول $p_i\ (i = 1,2,3,\dots,N)$ تعیین می‌شوند. با در اختیار داشتن p_iها، توزیع تغییرمکان و تنش در هر نقطه از محیط معلوم است. از این میان می‌توان توزیع فشار تماسی شالوده و محیط را نیز تعیین نمود. هم‌چنین با توجه به صلب بودن شالوده، با تعیین نیروی کل تماسی از رابطه‌ی ذیل:

$$F_v = 2\pi \int_0^a r\, p(r)\, dr = 2\pi \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{p_i}{2\pi \overline{r}_i} \right) \overline{r}_i\, \Delta r_i. \qquad (۳۷)$$

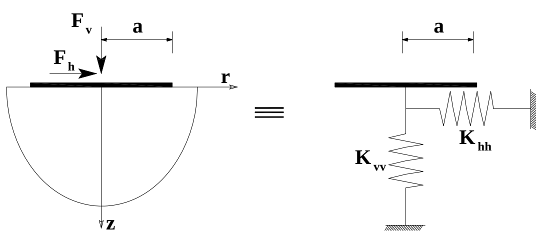
سختی بی‌بعد فنر متمرکز معادل خاک (شکل (۳)) از رابطه‌ی:

$$K_{vv} = \frac{F_v}{\Delta_W a\, A_{66}}, \qquad (۳۸)$$

تعیین می‌شود. عبارت $a\,A_{66}$ در رابطه‌ی (۳۸) جهت بی‌بعد شدن مقدار سختی اضافه شده است. هم‌چنین سختی فنر گسترده‌ی معادل خاک با استفاده از رابطه $k_v = K_{vv}/\pi a^2$ به‌دست می‌آید. به طریق مشابه، با فرض عدم ارتباط تغییرشکل‌های افقی و چرخشی، که در ادبیات این موضوع به نام رفتار relaxed نامیده می‌شود [2]، می‌توان سختی فنر متمرکز و گسترده معادل برای تغییرمکان‌های افقی و چرخشی را نیز تعیین کرد. برای این منظور می‌توان با جای‌گزینی $U(M)$، $U_i(M)$، $\bar{U}_i(M)$، Δ_u، F_h و K_{hh} به ترتیب: برای $W(M)$، $W_i(M)$، $\bar{W}_i(M)$، Δ_w، F_v و K_{vv} در روابط (۳۵) تا (۳۸)، به K_{hh} معادل رسید. توجه شود که $\bar{U}_i(M)$ با استفاده از روابط ۲ (۳۱) و ۳ (۳۱) به صورت ذیل به دست می‌آید:

$$U_i(M) = p_i \frac{\delta y}{\delta x} \int_{m_i}^{n_i} \left\{ \frac{\cos(\theta - \theta_0)}{4\pi A_{44}} \left[\int_0^{\infty} \xi(\gamma_1 + \gamma_2) J_0(\xi \bar{r}) J_2(\xi r)\, d\xi \right. \right. \left. \left. \int_0^{\infty} \xi(\gamma_2 - \gamma_1) J_0(\xi \bar{r}) J_0(\xi r)\, d\xi \right] \right\} d\bar{r}. \qquad (۳۹)$$

به همین ترتیب برای حرکت چرخشی تغییرمکان قائم در نقاط A_i برابر $a\Delta_{R\omega}/r_i$ می‌باشد؛ به طوری که $\Delta_{R\omega}$ حداکثر تغییرمکان به علت چرخش است.



شکل ۳ نمایش شکل شماتیک فنرهای معادل نیم‌فضا برای صفحه‌ی صلب دایره‌ای به شعاع a

نتایج عددی

در این بخش، نتایج به دست آمده در بخش‌های قبلی به صورت عددی برآورد می‌شوند. برآورد عددی انتگرال‌های ارائه شده در بخش‌های قبلی نیاز به دقت خاصی دارد؛ چرا که برآورد این انتگرال‌ها با توجه به وجود توابع بسل و رفتار نوسانی آن آسان نیست؛ به علاوه، حد بالای انتگرال‌ها محدود نبوده و باید با دقت مناسب تعیین شود. برای برآورد عددی، ۵ نوع ماده مطابق جدول (۱) در نظر گرفته می‌شود. در این جدول دو ماده‌ی اول ایزوتروپ با ضرایب پواسون ۰/۲۵ و ۰/۳۳ بوده و مابقی با رفتار ایزوتروپ جانبی می‌باشند. ماده‌ی ایزوتروپ با ضرایب پواسون ۰/۳۳ در این جدول، همان ماده‌ای است که لوکو و میتا [8] در نظر گرفته‌اند. مطابق تحقیقات لوکو و میتا سختی بی‌بعد فنر قائم معادل نیم‌فضا متشکل از ماده‌ی شماره‌ی II تحت شالوده‌ی صلب دایره‌ای برابر ٦/۰۰ می‌باشد [8]. ماده‌ی شماره‌ی I در تحقیقات پک و اشلاک [1] استفاده شده است. سختی بی‌بعد فنر قائم معادل نیم‌فضا متشکل از ماده‌ی شماره‌ی I تحت شالوده صلب دایره‌ای برابر ۵/۳۳ می‌باشد. در این مقاله با تغییر تعداد المان‌ها سختی بی‌بعد فنر قائم در هر مورد به دست آمده و از آن تعداد المان‌های مناسب تعیین می‌شود. سختی بی‌بعد فنر قائم به دست آمده از روش ارائه شده در این مقاله با تعداد المان‌های معادل ۱۰، ۲۰، ۳۰، ٤۰، ۵۰ و ٦۰ برای ماده‌ی شماره‌ی I به دست آمده و در جدول (۲) لیست شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، برای ۱۰ المان میزان خطای نسبی $\left(K_{vv(exact)} - K_{vv(num)}\right)/K_{vv(exact)}$ برابر ۱/٤۹ درصد و برای ٦۰ المان، این خطا برابر ۰/۰۰۱۸ درصد است. در ادامه، کلیه‌ی محاسبات با ٦۰ المان انجام می‌شود. شکل (٤)، تغییرمکان قائم سطح نیم‌فضا را برحسب فاصله‌ی افقی نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، شرایط مرزی تغییرمکانی

در فاصله‌ی $0 \le r \le a$ به طور کامل ارضا شده است. از آن‌جایی که شرایط مرزی تغییرمکان Δ_w برای همه‌ی حالات، یکسان است. تمام تغییرمکان‌ها در این شکل روی هم قرار گرفته‌اند؛ حال آن‌که اگر به عمق محیط برویم، همان‌طور که در شکل (۵) دیده می‌شود، این تغییرمکان‌ها متفاوت می‌باشند. نتایج نشان می‌دهد که تغییرمکان در عمق برای ماده II کمی متفاوت از مواد I، IV و V می‌باشد؛ اما نتایج برای ماده III کاملاً متفاوت از بقیه است. دلیل این امر، تفاوت ضریب $\bar{E}$ در مواد متفاوت می‌باشد. هم‌چنین تنش قائم درعمق به دلیل مشابه برای ماده III بسیار متفاوت از مواد دیگر بوده و در ماده II کمی با مواد I، IV و V فرق می‌کند (شکل (٦)). تنش قائم در سطح (شکل (۷))، همان‌طور که انتظار می‌رود در لبه‌ی دیسک با تغییرات سریع بوده و هر چه به طرف مرکز دیسک می‌رویم، این تنش هموارتر می‌گردد. از آن‌جایی که تنش قائم در هر ماده با نیروی کل خود نرمالیزه شده است، کلیه‌ی منحنی‌ها روی یکدیگر قرار گرفته‌اند، حال آنکه مطابق شکل (۸) اگر تنش‌ها بدون نرمال کردن رسم شوند، کاملاً متفاوت می‌باشند. شکل‌های (۹) و (۱۰) تغییرات تغییرمکان افقی و تنش برشی را بر حسب عمق نشان می‌دهد.

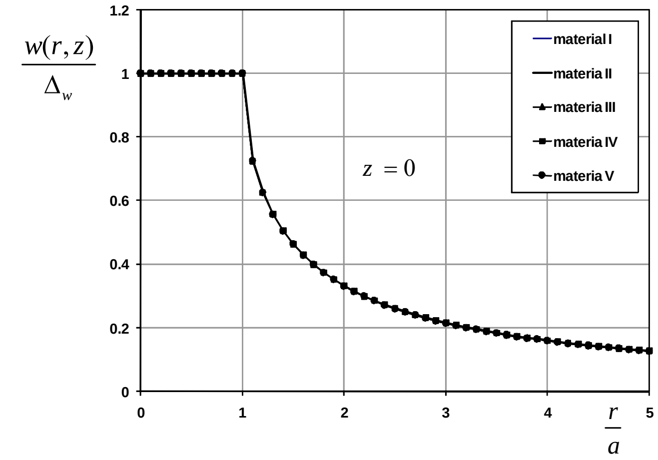
با توجه به مطالب فوق، سختی فنرهای قائم و افقی با ٦۰ المان در هر مورد به دست آمده و در جدول (۳) نشان داده شده‌اند. نتایج مربوط به سختی بی‌بعد فنر قائم با دقت بسیار خوب بر نتایج تحلیلی پک و اشلاک [1] و نیز لوکو و میتا [8] منطبق می‌باشد و نتایج مربوط به محیط III، IV و V نتایج جدید می‌باشند.

جدول ۱ مشخصات مکانیکی مصالح انتخابی

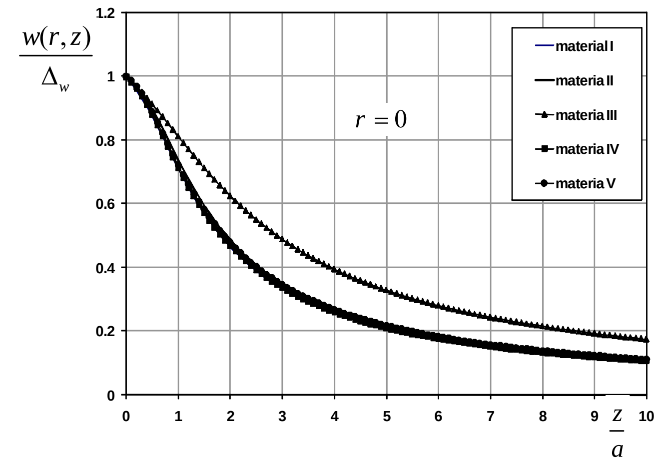
ماده	E (N/mm^2)	$\bar{E}$ (N/mm^2)	G (N/mm^2)	$\bar{G}$ (N/mm^2)	υ	$\bar{\upsilon}$
I (همسان)	50000	50000	20000	20000	0.25	0.25
II (همسان)	53333	53333	20000	20000	1/3	1/3
III (همسان جانبی)	50000	150000	20000	20000	0.25	0.25
IV (همسان جانبی)	100000	50000	40000	20000	0.25	0.25
V (همسان جانبی)	150000	50000	60000	20000	0.25	0.25

جدول ۲ مقایسه‌ی سختی قائم ناشی از نتایج تحلیلی پک و اشلاک [1] و نتایج عددی این مطالعه برای ماده‌ی شماره I

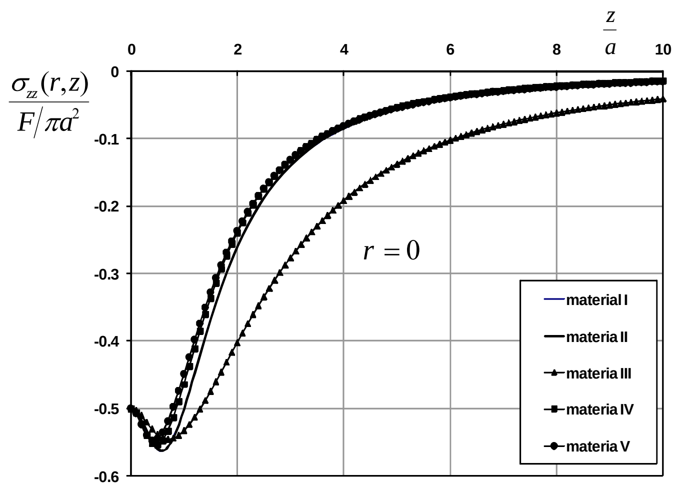
تعداد المان‌ها	$K_{\upsilon\upsilon(num)}$	$K_{\upsilon\upsilon(exact)}$	اختلاف ٪
10	5.2503	5.33	1.49
20	5.2947	5.33	0.66
30	5.3170	5.33	0.24
40	5.3240	5.33	0.11
50	5.3283	5.33	0.0318
60	5.3299	5.33	0.0018



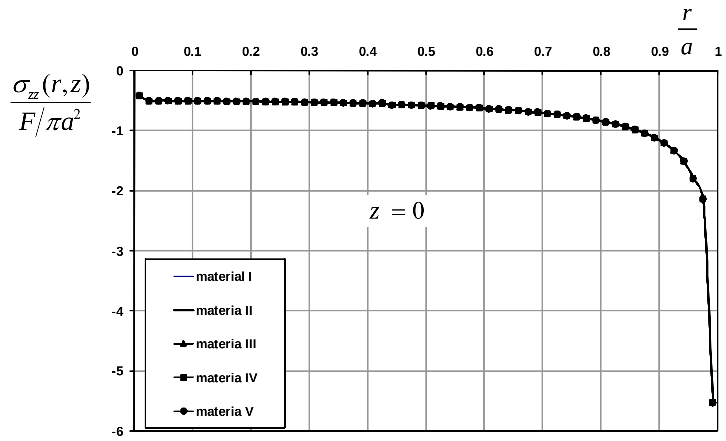
شکل ٤ تغییرات تغییر مکان قائم نسبی بر حسب فاصله‌ی افقی



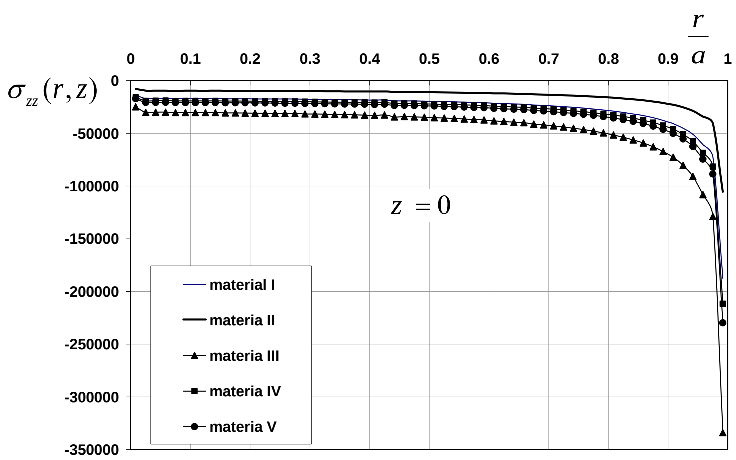
شکل ٥ تغییرات تغییر مکان قائم نسبی بر حسب عمق



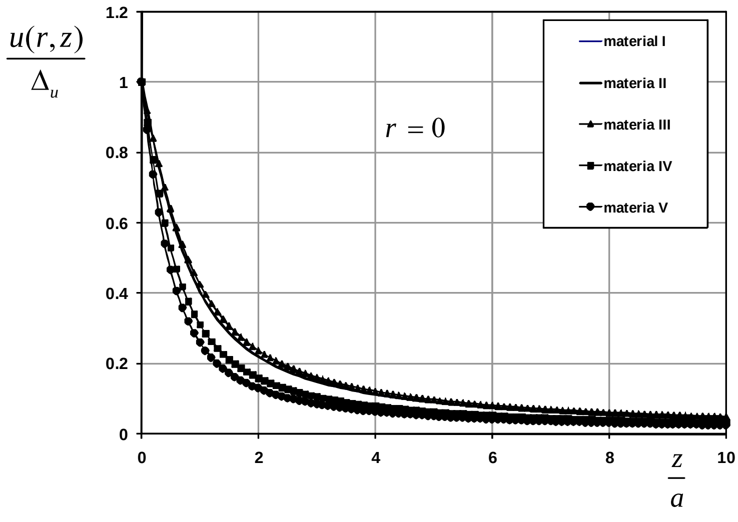
شکل ٦ تغییرات تنش قائم بر حسب عمق



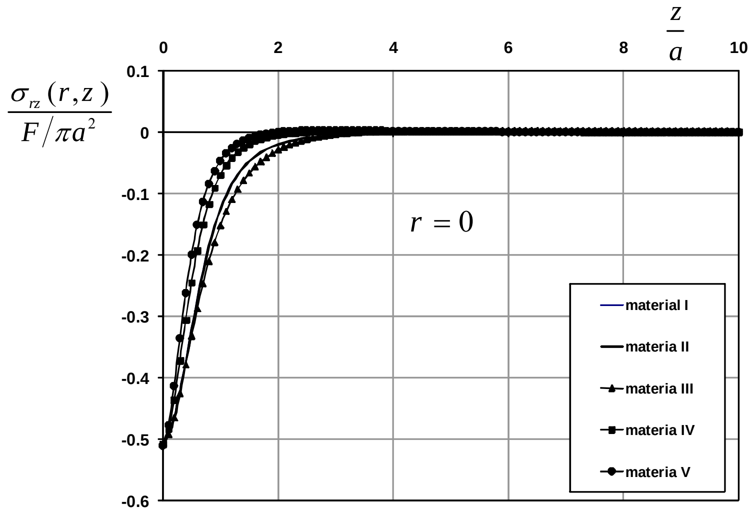
شکل ۷ تغییرات تنش قائم نرمال شده بر حسب فاصله‌ی افقی



شکل ۸ تغییرات تنش قائم بر حسب فاصله‌ی افقی



شکل ۹ تغییرات تغییر مکان افقی نسبی بر حسب عمق



شکل ۱۰ تغییرات تنش افقی بر حسب عمق

جدول ۳ سختی بی‌بعد فنرهای قائم و افقی در محیط‌های متفاوت

ماده	K_{vv}	K_{hh}	تعداد المان‌ها
I	5.32990	4.56012	60
II	5.99614	4.78812	60
III	9.48866	4.64967	60
V	3.00696	3.34287	60
IV	2.17662	2.77957	60

نتیجه‌گیری

در در این مقاله یک نیم‌فضای ایزوتروپ جانبی تحت اثر بار حلقوی دلخواه در سطح قرار گرفته و از آن توابع گرین تغییرمکان و تنش برای بار حلقوی به دست آمده‌اند. بدین منظور معادلات حاکم بر مسأله به وسیله توابع پتانسیل لخنیتسکی-هو-نواکی مجزاسازی شده و معادلات حاکم بر توابع پتانسیل به کمک سری فوریه و تبدیل هنکل حل شده‌اند و با استفاده از قضیه تبدیل معکوس هنکل نتایج به صورت انتگرالهای یک بعدی ارائه شده‌اند. به طور واضح با میل شعاع بار حلقوی به صفر توابع گرین برای بار متمرکز نتیجه خواهند شد. با استفاده از توابع گرین بدست آمده، سختی فنرهای افقی و قائم ناشی از قرارگیری یک شالوده صلب بر روی نیم‌فضای مورد نظر به صورت تحلیلی به شکل انتگرال‌های یک بعدی ارائه شده و به منظور ارائه نتایج عددی با استفاده از المان‌های حلقوی با فشار ثابت برآورد عددی شده‌اند. نشان داده شده است که با اختیار تعداد محدودی المان با فشار ثابت نتایج در محیط‌های ایزوتروپ به سرعت به نتایج تحلیلی همگرا می‌شود. در نهایت سختی بی‌بعد فنرهای افقی و قائم برای محیط‌های ایزوتروپ جانبی نیز برآورد شده و به صورت جدول ارائه شده‌اند.

مراجع

1. Pak, R. Y. S. and Ashlock, J. C. “Method of adaptive-gradient elements for computational mechanics.” *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 133, No. 1, pp. 87-97, (2007).
2. Pak, R. Y. S. and Gobert, A. T. “Forced vertical vibration of rigid discs with an arbitrary embedment.” *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 117, No. 11, pp. 2527-2548, (1991).
3. Reissner, E. and Sagoci, H. F. “Forced torsional oscillations of an elastic half-space.” I. *J. Appl. Phys*., Vol. 15(9), pp 652-654, (1944).
4. Robertson, I. A. “Forced vertical vibration of a rigid circular disc on a semi-infinite elastic solid.” Proc. Camb. Phil. Soc., Vol. 62 A, pp 547-553, (1966).
5. Sneddon, I. N. “Fourier transforms.” McGraw-Hill, New York, N. Y, (1951).
6. Sneddon, I. N. “Mixed boundary value problems in potential theory.” North-Holland Publishing Company, Amsterdam, (1966).
7. Michell, J. H. “The stress in an aeolotropic elastic solid with an infinite plane boundary.” Proceeding of the London Mathematical Society, Vol. 32, pp 247-258, (1900).
8. Luco, J. E. and Mita, A. “Response of a circular foundation on a uniform half-space to elastic waves.” Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 15, pp 105-118, (1987).

۹. رحیمیان، م. و اسکندری قادی، م، تئوری ارتجاعی، انتشارات دانشگاه تهران، (۱۳۷۹).

10. Eskandari-Ghadi, M. and Pak, R. Y. S. “Elastodynamics and elastostatics by a unified method of potentials for x 3-convex domains.” *Journal of Elasticity*, Vol. 92, pp 187-194, (2008).
11. Tran-Cong, T. “On the completeness and uniqueness of Papkovich-Neuber and the non-axissymetric Boussinesq, Love and Burgatti solutions in general cylindrical coordinates.” *Journal of Elasticity,* Vol. 36, pp 227-255, (1995).
12. Elliott, H. A. “Three dimensional stress distribution in hexagonal aeolotropic crystals.” Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Vol. 44, pp 522-533, (1948).
13. Lekhnitskii, S. G. “Theory of anisotropic elastic bodies.” Holden-Day Publishing Co., San Fransisko, Calif, (1981).
14. Wang, M. Z. and Wang, W. “Completeness and nonuniqueness of general solutions of transversely isotropic elasticity.” *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 32 (374) pp 501-513, (1995).
15. Eskandari-Ghadi, M. “A complete solutions of the wave equations for transversely isotropic media.” *Journal of Elasticity*, Vol. 81, pp 1-19, (2005).
16. Noble, B. “The solution of Bessel function dual integral equations by a multiplying-factor method.” Proc. Camb. Phil. Soc., Vol. 59, pp 351-371, (1963).

ضمیمه‌ی الف

پارامترهای $\gamma_1 , \gamma_2 , \gamma_3 , \Omega_1$ و Ω_2 و مشتقات آن‌ها برای حالتی که $s_1 \neq s_2$ است:

$$\gamma_1(\xi,z)=\frac{\alpha_3}{\bar{I}\xi}\left(s_1\bar{\nu}_2 e^{-s_1\xi z}-s_2\bar{\nu}_1 e^{-s_2\xi z}\right),\qquad \gamma_2(\xi,z)=\frac{e^{-s_0\xi z}}{s_0\xi},$$

$$\gamma_3(\xi,z)=\frac{\alpha_3}{\bar{I}\xi}\left(s_1\bar{\eta}_2 e^{-s_1\xi z}-s_2\bar{\eta}_1 e^{-s_2\xi z}\right),$$

$$\Omega_1(\xi,z)=\frac{(1+\alpha_1)}{\bar{I}\xi}\left[\bar{\nu}_1\left(s_2^2\frac{\alpha_2}{(1+\alpha_1)}-1\right)e^{-s_2\xi z}-\bar{\nu}_2\left(s_1^2\frac{\alpha_2}{(1+\alpha_1)}-1\right)e^{-s_1\xi z}\right],$$

$$\Omega_2(\xi,z)=\frac{(1+\alpha_1)}{\bar{I}\xi}\left[\bar{\eta}_1\left(s_2^2\frac{\alpha_2}{(1+\alpha_1)}-1\right)e^{-s_2\xi z}-\bar{\eta}_2\left(s_1^2\frac{\alpha_2}{(1+\alpha_1)}-1\right)e^{-s_1\xi z}\right],$$

(الف-۱)

$$\frac{d\gamma_1(\xi,z)}{dz}=\frac{\alpha_3}{\bar{I}}\left(s_2^2\bar{\nu}_1 e^{-s_2\xi z}-s_1^2\bar{\nu}_2 e^{-s_1\xi z}\right),\qquad \frac{d\gamma_2(\xi,z)}{dz}=-e^{-s_0\xi z},$$

$$\frac{d\gamma_3(\xi,z)}{dz}=\frac{\alpha_3}{\bar{I}}\left(s_2^2\bar{\eta}_1 e^{-s_2\xi z}-s_1^2\bar{\eta}_2 e^{-s_1\xi z}\right),$$

$$\frac{d\Omega_1(\xi,z)}{dz}=\frac{(1+\alpha_1)}{\bar{I}}\left[s_1\bar{\nu}_2\left(s_1^2\frac{\alpha_2}{(1+\alpha_1)}-1\right)e^{-s_1\xi z}-s_2\bar{\nu}_1\left(s_2^2\frac{\alpha_2}{(1+\alpha_1)}-1\right)e^{-s_2\xi z}\right],$$

$$\frac{d\Omega_2(\xi,z)}{dz}=\frac{(1+\alpha_1)}{\bar{I}}\left[s_1\bar{\eta}_2\left(s_1^2\frac{\alpha_2}{(1+\alpha_1)}-1\right)e^{-s_1\xi z}-s_2\bar{\eta}_1\left(s_2^2\frac{\alpha_2}{(1+\alpha_1)}-1\right)e^{-s_2\xi z}\right].$$

(الف-۲)

پارامترهای $\gamma_1 , \gamma_2 , \gamma_3 , \Omega_1$ و Ω_2 و مشتقات آن‌ها برای حالتی که $s_1 = s_2$ است:

$$\gamma_1(\xi,z)=\frac{\alpha_3\left[2\alpha_2 s_2-\xi z\left(1+\alpha_1-\alpha_3\frac{A_{13}}{A_{33}}-\alpha_2 s_2^3\right)\right]s_2^2 e^{-s_2\xi z}}{\xi\left\{s_2^2\left(\alpha_3-\alpha_2\right)\left[\alpha_3\frac{A_{13}}{A_{33}}-\alpha_2 s_2^2-1-\alpha_1\right]+\left(1+\alpha_1\right)\left[1+\alpha_1-\alpha_3\frac{A_{13}}{A_{33}}-3\alpha_2 s_2^2\right]\right\}},$$

$$\gamma_3(\xi,z)=\frac{\alpha_3\left[\left(1+\alpha_1-\left(\alpha_3-\alpha_2\right)s_2^2\right)-\left(1+\alpha_1+\left(\alpha_3-\alpha_2\right)s_2^2\right)s_2\xi z\right]e^{-s_2\xi z}}{\xi\left\{s_2^2\left(\alpha_3-\alpha_2\right)\left[\alpha_3\frac{A_{13}}{A_{33}}-\alpha_2 s_2^2-1-\alpha_1\right]+\left(1+\alpha_1\right)\left[1+\alpha_1-\alpha_3\frac{A_{13}}{A_{33}}-3\alpha_2 s_2^2\right]\right\}},$$

$$\Omega_1(\xi,z)=\frac{(1+\alpha_1)\left[s_2\xi z\left(s_2^2\frac{\alpha_2}{1+\alpha_1}-1\right)\left(1+\alpha_1-\alpha_3\frac{A_{13}}{A_{33}}-\alpha_2 s_2^2\right)\right]e^{-s_2\xi z}}{\xi\left\{s_2^2\left(\alpha_3-\alpha_2\right)\left[\alpha_3\frac{A_{13}}{A_{33}}-\alpha_2 s_2^2-1-\alpha_1\right]+\left(1+\alpha_1\right)\left[1+\alpha_1-\alpha_3\frac{A_{13}}{A_{33}}-3\alpha_2 s_2^2\right]\right\}}$$
$$-\frac{(1+\alpha_1)\left[\left(1+\frac{\alpha_2}{1+\alpha_1}s_2^2\right)\left(1+\alpha_1-\alpha_3\frac{A_{13}}{A_{33}}\right)+\alpha_2 s_2^2\left(3-\frac{\alpha_2}{1+\alpha_1}s_2^2\right)\right]e^{-s_2\xi z}}{\xi\left\{s_2^2\left(\alpha_3-\alpha_2\right)\left[\alpha_3\frac{A_{13}}{A_{33}}-\alpha_2 s_2^2-1-\alpha_1\right]+\left(1+\alpha_1\right)\left[1+\alpha_1-\alpha_3\frac{A_{13}}{A_{33}}-3\alpha_2 s_2^2\right]\right\}},$$

$$\Omega_2(\xi,z)=\frac{(1+\alpha_1)\left[\xi z\left(s_2^2\frac{\alpha_2}{1+\alpha_1}-1\right)\left(1+\alpha_1+\left(\alpha_3-\alpha_2\right)s_2^2\right)-2\alpha_3 s_2\right]e^{-s_2\xi z}}{\xi\left\{s_2^2\left(\alpha_3-\alpha_2\right)\left[\alpha_3\frac{A_{13}}{A_{33}}-\alpha_2 s_2^2-1-\alpha_1\right]+\left(1+\alpha_1\right)\left[1+\alpha_1-\alpha_3\frac{A_{13}}{A_{33}}-3\alpha_2 s_2^2\right]\right\}},$$

(الف-۳)

$$\frac{d\gamma_1(\xi,z)}{dz}=\frac{-\alpha_3 s_2^2\left[\left(1+\alpha_1-\alpha_3\frac{A_{13}}{A_{33}}-\alpha_2 s_2^3+2\alpha_2 s_2^2\right)-\xi z\left(1+\alpha_1-\alpha_3\frac{A_{13}}{A_{33}}-\alpha_2 s_2^3\right)\right]e^{-s_2\xi z}}{s_2^2(\alpha_3-\alpha_2)\left[\alpha_3\frac{A_{13}}{A_{33}}-\alpha_2 s_2^2-1-\alpha_1\right]+(1+\alpha_1)\left[1+\alpha_1-\alpha_3\frac{A_{13}}{A_{33}}-3\alpha_2 s_2^2\right]},$$

$$\frac{d\gamma_2(\xi,z)}{dz}=-e^{-s_0\xi z},$$

$$\frac{d\gamma_3(\xi,z)}{dz}=\frac{\alpha_3 s_2\left[-2(1+\alpha_1)+\left(1+\alpha_1+(\alpha_3-\alpha_2)s_2^2\right)s_2\xi z\right]e^{-s_2\xi z}}{s_2^2(\alpha_3-\alpha_2)\left[\alpha_3\frac{A_{13}}{A_{33}}-\alpha_2 s_2^2-1-\alpha_1\right]+(1+\alpha_1)\left[1+\alpha_1-\alpha_3\frac{A_{13}}{A_{33}}-3\alpha_2 s_2^2\right]},$$

$$\frac{d\Omega_1(\xi,z)}{dz}=\frac{s_2^2(1+\alpha_1)\left[2s_2\frac{\alpha_2}{1+\alpha_1}\left(1+\alpha_1-\alpha_3\frac{A_{13}}{A_{33}}\right)-2\alpha_2 s_2\right]e^{-s_2\xi z}}{s_2^2(\alpha_3-\alpha_2)\left[\alpha_3\frac{A_{13}}{A_{33}}-\alpha_2 s_2^2-1-\alpha_1\right]+(1+\alpha_1)\left[1+\alpha_1-\alpha_3\frac{A_{13}}{A_{33}}-3\alpha_2 s_2^2\right]}$$
$$-\frac{s_2^2(1+\alpha_1)\xi z\left(s_2^2\frac{\alpha_2}{1+\alpha_1}-1\right)\left(1+\alpha_1-\alpha_3\frac{A_{13}}{A_{33}}-\alpha_2 s_2^2\right)e^{-s_2\xi z}}{s_2^2(\alpha_3-\alpha_2)\left[\alpha_3\frac{A_{13}}{A_{33}}-\alpha_2 s_2^2-1-\alpha_1\right]+(1+\alpha_1)\left[1+\alpha_1-\alpha_3\frac{A_{13}}{A_{33}}-3\alpha_2 s_2^2\right]},$$

$$\frac{d\Omega_2(\xi,z)}{dz}=\frac{(1+\alpha_1)\left[\left(s_2^2\frac{\alpha_2}{1+\alpha_1}-1\right)\left(1+\alpha_1+(\alpha_3-\alpha_2)s_2^2\right)+2\alpha_3 s_2\right]e^{-s_2\xi z}}{s_2^2(\alpha_3-\alpha_2)\left[\alpha_3\frac{A_{13}}{A_{33}}-\alpha_2 s_2^2-1-\alpha_1\right]+(1+\alpha_1)\left[1+\alpha_1-\alpha_3\frac{A_{13}}{A_{33}}-3\alpha_2 s_2^2\right]}$$
$$-\frac{s_2\xi z(1+\alpha_1)\left(s_2^2\frac{\alpha_2}{1+\alpha_1}-1\right)\left(1+\alpha_1+(\alpha_3-\alpha_2)s_2^2\right)e^{-s_2\xi z}}{s_2^2(\alpha_3-\alpha_2)\left[\alpha_3\frac{A_{13}}{A_{33}}-\alpha_2 s_2^2-1-\alpha_1\right]+(1+\alpha_1)\left[1+\alpha_1-\alpha_3\frac{A_{13}}{A_{33}}-3\alpha_2 s_2^2\right]},$$
(الف-٤)

عبارت‌های ذیل در روابط فوق به کار رفته است:

$$\overline{\eta}_i=(\alpha_3-\alpha_2)s_i^2+(1+\alpha_1),\ \overline{\nu}_i=(1+\alpha_1-\alpha_3\frac{A_{13}}{A_{33}})s_i-\alpha_2 s_i^3,\qquad (i=1,2)$$
(الف-٥)

$$I=(\eta_2\nu_1-\eta_1\nu_2),\qquad \overline{I}=(\overline{\eta}_2\overline{\nu}_1-\overline{\eta}_1\overline{\nu}_2).$$
(الف-٦)